

# תוכן עניינים

## תוכן עניינים

18	פתח דבר	
19	הקדמה	
19	0.1 מה היא תורת המשחקים	
21	0.2 הספר והשימוש בו	
22	0.3 מבנה הספר	
24	0.4 סימונים	
24	0.5 תודות	
26	1 משחק השחמט	
32	1.1 הערות	
33	1.2 תרגילים	
34	2 תורת התועלת	
37	2.1 המודל	
39	2.2 האקסיומות של תורת התועלת	
41	2.2.1 רציפות	
42	2.2.2 מונוטוניות	
43	2.2.3 פישוט של הגרלות	
44	2.2.4 הצבה	
44	2.3 משפט האפיון של פונקציית התועלת	
49	2.4 פונקציית התועלת וטרנספורמציות אפיניות	
50	2.5 היחס לסיכון	

53	דיון	2.6
53	הנחת השלמות	2.6.1
53	הנחת הטרנזיטיביות	2.6.2
54	תפיסת ההסתברות	2.6.3
54	אקסיומת הפישוט	2.6.4
55	אספקטים נוספים המשפיעים על ההעדפות	2.6.5
56	הסתברות סובייקטיבית	2.7
57	הערות	2.8
57	תרגילים	2.9
64	משחקים בצורה רחבה	3
65	גרפים ועצים	3.1
68	עצי משחק	3.2
73	צ'ומפ – המשחק של דייויד גייל	3.3
75	משחק עם מהלכי גורל	3.4
78	משחקים ללא ידיעה שלמה	3.5
83	אסטרטגיה במשחק עם ידיעה לא שלמה	3.5.1
84	תרגילים	3.6
103	משחקים בצורה אסטרטגית	4
108	הקשר בין הצורה הרחבה והצורה האסטרטגית	4.1
111	משחקים לא שיתופיים: מושגי פתרון	4.2
111	סימונים	4.3
112	מושג השליטה	4.4
118	מכרוז מחיר שני	4.5
121	רציונליזציה: סדר הסילוק של אסטרטגיות נשלטות	4.6
122	עיקרון היציבות: שיווי משקל נאש	4.7
125	תכונות של שיווי משקל נאש	4.8

126	יציבות	4.8.1
126	הסכם המגשים את עצמו	4.8.2
126	שיווי משקל ואבולוציה	4.8.3
127	שיווי משקל מנקודת ראות נורמטיבית	4.8.4
128	ביטחון: מושג המקסמין	4.9
131	השפעת סילוק אסטרטגיות נשלטות על תוצאת המשחק	4.10
135	משחקי שני שחקנים סכום אפס	4.11
144	משחקים על ריבוע היחידה	4.12
144	משחק שני שחקנים סכום אפס על ריבוע היחידה	4.12.1
146	משחק שני שחקנים שאינו סכום אפס על ריבוע היחידה	4.12.2
151	משחקים עם ידיעה שלמה	4.13
154	הערות	4.14
154	תרגילים	4.15
170	אסטרטגיות מעורבות	5
179	חישוב שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות	5.1
179	השיטה הישירה	5.1.1
184	חישוב נקודות שיווי משקל	5.1.2
186	עיקרון האדישות	5.1.3
188	משחקי שני שחקנים סכום אפס ותכנון לינארי	5.1.4
189	משחקי שני שחקנים שאינם סכום אפס	5.1.5
190	הוכחת משפט נאש	5.2
195	הכללה של משפט נאש	5.3
197	תורת התועלת ואסטרטגיות מעורבות	5.4
201	ערך המקסמין וערך המינימקס במשחק $n$ שחקנים	5.5
204	ידיעה לא שלמה: ערך האינפורמציה	5.6
210	אסטרטגיה יציבה אבולוציונית	5.7

219	הערות	5.8
219	תרגילים	5.9
243	אסטרטגיות התנהגות ומשפט קיון	6
244	אסטרטגיות התנהגות	6.1
249	משפט קיון	6.2
257	שיווי משקל באסטרטגיות התנהגות	6.3
260	הערות	6.4
260	תרגילים	6.5
268	עידונים של מושג שיווי המשקל	7
268	שיווי משקל תת-משחקי משוכלל	7.1
274	רציונליות ואינדוקציה לאחור	7.2
276	שיווי משקל משוכלל	7.3
283	הערות	7.4
284	תרגילים	7.5
291	שיווי משקל מתואם	8
291	דוגמאות	8.1
296	הגדרת שיווי משקל מתואם ותכונותיו	8.2
304	שיווי משקל מתואם ומשחקים עם אינפורמציה לא מלאה	8.3
315	הסתברויות סובייקטיביות	8.4
316	הערות	8.5
316	תרגילים	8.6
322	משחקים עם אינפורמציה לא מלאה עם התפלגות אפריורית משותפת	9
325	מודל אומן של אינפורמציה לא מלאה – מושג הידיעה	9.1
338	מודל אומן של אינפורמציה לא מלאה – מושג האמונות	9.2
348	מרחב מצבי עולם אינסופי	9.3
350	מודל הרסני של משחקים עם אינפורמציה לא מלאה	9.4

356	9.4.1	אסטרטגיות ותשלומים
358	9.4.2	שיווי משקל במשחקים עם אינפורמציה לא מלאה
367	9.5	משחקים עם אינפורמציה לא מלאה כהצדקה אפשרית לאסטרטגיות מעורבות
370	9.6	הנחת ההתפלגות האפריורית המשותפת: אמונות לא-קונסיסטנטיות
372	9.7	הערות
373	9.8	תרגילים
388	10	משחקים עם אינפורמציה לא מלאה: המודל הכללי
388	10.1	מרחבי אמונות
393	10.2	אמונה וידיעה
396	10.3	דוגמאות למרחבי אמונות
404	10.4	תתי-מרחבים של אמונות
411	10.5	משחקים עם אינפורמציה לא מלאה
420	10.6	הערות על מושג הקונסיסטנטיות
428	10.7	הערות
428	10.8	תרגילים
442	11	מרחב האמונות האוניברסלי
449	11.1	הטיפוס ומשמעותו
453	11.2	הגדרת מרחב האמונות האוניברסלי
455	11.3	הערות
455	11.4	תרגילים
460	12	מכרזים
462	12.1	סימונים
463	12.2	שיטות מכרז נפוצות
464	12.3	הגדרה פורמלית של שיטת מכרזים
467	12.4	קשרים בין שיטות מכרז
469	12.5	המודל הסימטרי עם ערכים פרטיים בלתי תלויים

470 . . . . .	מכרזים סגורים	12.5.1	
473 . . . . .	אסטרטגיות שיווי משקל	12.5.2	
477 . . . . .	משפט שקילות הרווח	12.5.3	
481 . . . . .	דמי השתתפות	12.5.4	
483 . . . . .	משפט המעטפת	12.6	
487 . . . . .	שנאת סיכון	12.7	
491 . . . . .	תכנון מנגנונים	12.8	
495 . . . . .	עיקרון הגילוי	12.8.1	
496 . . . . .	משפט שקילות הרווח	12.8.2	
501 . . . . .	מנגנונים סבירים פרטית	12.9	
501 . . . . .	מציאת מנגנון אופטימלי	12.10	
508 . . . . .	הערות	12.11	
509 . . . . .	תרגילים	12.12	
516 . . . . .	משחקים חוזרים	13	
517 . . . . .	המודל	13.1	
518 . . . . .	דוגמאות	13.2	
521 . . . . .	המשחק ה- $T$ -שלבי	13.3	
521 . . . . .	היסטוריות ואסטרטגיות	13.3.1	
524 . . . . .	תשלומים ושיווי משקל	13.3.2	
526 . . . . .	ערך המינמקס	13.3.3	
528 . . . . .	אפיון קבוצת תשלומי שיווי המשקל במשחק ה- $T$ -שלבי	13.4	
529 . . . . .	הוכחת המשפט העממי – דוגמה	13.4.1	
531 . . . . .	הוכחת המשפט העממי – פירוט	13.4.2	
534 . . . . .	המשחק האינסופי	13.5	
540 . . . . .	המשחק המהוון	13.6	
542 . . . . .	שיווי משקל אחיד	13.7	

552	דיון	13.8
552	הערות	13.9
553	תרגילים	13.10
563	משחקים חוזרים עם תשלומים וקטוריים	14
564	סימונים	14.1
565	המודל	14.2
567	דוגמאות	14.3
569	קשרים בין קבוצות בנות-השגה וקבוצות בנות מניעה	14.4
570	תנאי גיאומטרי המבטיח שקבוצה היא בת-השגה	14.5
580	תנאים נוספים המבטיחים שקבוצה תהיה בת-השגה	14.6
586	יישום: משחקים חוזרים עם אינפורמציה לא מלאה	14.7
596	יישום: הכה את המומחה	14.8
596	המודל	14.8.1
599	קיום אסטרטגיה חסרת-חרטה – מקרה פרטי	14.8.2
601	קיום אסטרטגיה חסרת-חרטה – המקרה הכללי	14.8.3
602	דיון	14.9
604	הערות	14.10
604	תרגילים	14.11
618	בחירה חברתית	15
621	פונקציות רווחה חברתית	15.1
631	פונקציות בחירה חברתית	15.2
638	עמידות למניפולציות	15.3
641	דיון	15.4
641	הערות	15.5
642	תרגילים	15.6
650	משחק המיקוח	16

652	סימונים	16.1
653	המודל	16.2
654	העקרונות של נאש	16.3
655	עיקרון הסימטריה	16.3.1
655	עיקרון היעילות	16.3.2
656	עיקרון הקווריאנטיות תחת טרנספורמציות אפיניות	16.3.3
657	עיקרון האי-תלות באפשרויות לא רלבנטיות	16.3.4
658	קיום, אפיון ויחידות פתרון נאש	16.4
663	אפיון שני לפתרון של נאש	16.5
666	השוואת תועלות	16.5.1
667	נקודות הסטטוס קוו	16.5.2
668	המינימליות של אוסף העקרונות של נאש	16.6
670	ביקורת על העקרונות של נאש	16.7
672	עקרונות מונוטוניות	16.8
680	משחק המיקוח כאשר יש יותר משני שחקנים	16.9
682	הערות	16.10
683	תרגילים	16.11
691	משחקים שיתופיים עם תשלומי צד	17
692	דוגמאות	17.1
693	משחקי רווח	17.1.1
693	משחקי הוצאות	17.1.2
694	משחקים פשוטים	17.1.3
695	משחקי רוב משוקלל	17.1.4
696	משחקי שוק	17.1.5
696	משחקי סדר	17.1.6
697	משחקי עץ פורש	17.1.7

699	משחקי חלוקת עלות	17.1.8
699	שקילות אסטרטגית	17.2
702	משחק כווקטור במרחב אוקלידי	17.3
703	משפחות מיוחדות של משחקים	17.4
704	מושגי פתרון	17.5
707	הצגה גיאומטרית של קבוצת וקטורי התשלומים	17.6
710	הערות	17.7
710	תרגילים	17.8
719	הליבה	18
719	הגדרת הליבה	18.1
724	אוספים מאוזנים	18.2
728	משפט בונדרבה-שפלי	18.3
729	תנאי בונדרבה-שפלי הוא תנאי הכרחי לקיום ליבה לא ריקה	18.3.1
730	תנאי בונדרבה-שפלי הוא תנאי מספיק לקיום ליבה לא ריקה	18.3.2
734	משפט בונדרבה-שפלי: הוכחה בעזרת תכנון לינארי	18.4
736	משחקי שוק	18.5
742	הכיסוי המאוזן של משחק	18.5.1
744	כל משחק מאוזן לחלוטין הוא משחק שוק	18.5.2
746	משחקים אדיטיביים	18.5.3
749	תכונת העקביות של הליבה	18.6
751	משחקים קמורים	18.7
756	משחקי עץ פורש	18.8
759	משחקי זרימה	18.9
767	הליבה של מבנים קואליציוניים	18.10
770	דיון	18.11
770	הערות	18.12

771	תרגילים	18.13
783	ערך שפלי	19
783	העקרונות של שפלי	19.1
784	עיקרון היעילות	19.1.1
784	עיקרון הסימטריה	19.1.2
785	עיקרון הקווריאנטיות תחת שקילות אסטרטגית	19.1.3
785	עיקרון שחקן האפס	19.1.4
786	עיקרון החיבוריות	19.1.5
786	פתרונות המקיימים חלק מהעקרונות	19.2
789	הגדרת הערך של שפלי ואפיונו	19.3
794	אפיון שני לערך שפלי	19.4
794	עיקרון השוליות	19.4.1
796	האפיון השני של ערך שפלי	19.4.2
798	דוגמאות	19.5
800	יישום: מדד הכוח של שפלי ושוביק	19.6
802	מדד הכוח של חברות מועצת הביטחון של האו"מ	19.6.1
804	משחקים קמורים	19.7
805	נוסחת האלכסון	19.8
808	עקביות הערך של שפלי	19.9
814	הערות	19.10
814	תרגילים	19.11
823	קבוצת המיקוח	20
829	קבוצת המיקוח במשחק שני שחקנים	20.1
830	קבוצת המיקוח במשחק שלושה שחקנים	20.2
838	קבוצות המיקוח במשחקים קמורים	20.3
840	דיון	20.4

841	הערות	20.5
841	תרגילים	20.6
845	הגרעינון	21
853	תכונות של הגרעינון	21.1
859	חישוב הגרעינון	21.2
860	אפיון הקדם גרעינון	21.3
867	עקביות הגרעינון	21.4
869	משחקי רוב משוקלל	21.5
876	בעיות פשיטת רגל	21.6
878	המודל	21.6.1
878	המקרה $n = 2$	21.6.2
880	המקרה הכללי	21.6.3
882	הגרעינון של בעיית פשיטת הרגל	21.6.4
887	דיון	21.7
889	הערות	21.8
889	תרגילים	21.9
898	שידוכים יציבים	22
899	המודל	22.1
901	קיום שידוך יציב: תהליך חיזור גברים	22.2
904	תהליך חיזור נשים	22.3
905	השוואה בין שידוכים	22.4
910	המבנה הסריגי של קבוצת השידוכים היציבים	22.4.1
912	הרחבות	22.5
912	מספר הגברים שונה ממספר הנשים	22.5.1
913	שיקולים אסטרטגיים	22.5.2
914	הרצון להישאר רווק, או: שידוך, אך לא בכל מחיר	22.5.3

917 . . . . .	שידוך רב-ערכי: השמת סטודנטים לאוניברסיטאות	22.5.4
918 . . . . .	שידוכים באוכלוסיה חד-מינית	22.5.5
919 . . . . .	הערות	22.6
919 . . . . .	תרגילים	22.7
927 . . . . .	נספחים	23
927 . . . . .	משפטי נקודת שבת	23.1
927 . . . . .	הלמה של שפרנר	23.1.1
945 . . . . .	משפט נקודת השבת של בראוור	23.1.2
948 . . . . .	משפט נקודת השבת של קקוטני	23.1.3
951 . . . . .	משפט KKM	23.1.4
953 . . . . .	משפט המישור-העילי המפריד	23.2
956 . . . . .	תכנון לינארי	23.3
961 . . . . .	הערות	23.4
961 . . . . .	תרגילים	23.5
969 . . . . .	מקורות	
985 . . . . .	סימונים מתמטיים	
993 . . . . .	מפתח	

## פתח דבר

לנגד עינינו ראינו כיצד תורת המשחקים הופכת לתורה אשר מעבר לכך שעקרונותיה מיושמים בדיסציפלינות כה רבות ושונות – מכלכלה וביולוגיה ועד פסיכולוגיה ופילוסופיה – היא גם מפגישה בין תחומי מדע אשר לא ניתן היה לדמיין שהם משיקים זה לזה, למשל כלכלה ומדעי המוח, היוצרים היום את התחום החדשני של נוירוככלכלה.

הפרופסורים שמואל זמיר, מיכאל משלר, ואילון סולן הינם מבכירי המדענים בארץ – ובעולם! – העוסקים בתורת המשחקים. לכן אנו בני מזל שספר ברמה אקדמאית, ומתאים ללימוד הן ברמה בסיסית והן בקורסים מתקדמים, נכתב על ידיהם בעברית. לפנינו ספר מעולה, כתוב בחסד עליון, העוסק בכל ענפי תורת המשחקים המתמטית – בחן, בשקיפות, ובצורה מדויקת (רגורוזית), ואינו מסתפק רק בתיאור המושגים ובהדגמתם.

הספר מקיף את תורת המשחקים על שני ענפיה העיקריים: התורה הקואליציונית (שיתופית) והתורה האסטרטגית (לא שיתופית). הוא ייחודי בכך שיש בו חומר מתקדם שאינו מופיע עדיין בספרי לימוד קודמים (אף לא באנגלית), כגון "משחקים עם ידיעה לא מלאה" ו-"משחקים עם תשלומים וקטוריים".

הספר מותאם באופן מיוחד להוראה, מכיוון שהשלמות והדיוק המתמטיים מלווים גם בתוצאות קלאסיות במתמטיקה; לדוגמה, משפטי נקודת השבת של בראוור וקוטני מוכחים בספר, כך שהוא מכיל את כל החומר הדרוש להבנה המתמטית, מבלי שיש צורך להשתמש במקורות נוספים. נוסף לכך, כמות התרגילים בספר גדולה מאוד ומדורגת, החל בתרגילים קלים לתלמיד המתחיל, ועד לתרגילים קשים ומאתגרים המתאימים לתלמיד דוקטורט.

חן חן למחברים, ואשרי העם שככה לו!

ישראל אומן

ירושלים

יום ג' לסדר

ואלה המשפטים אשר תשים לפניהם

תשס"ח לפ"ק

# הקדמה

## 0.1. מה היא תורת המשחקים

"תורת המשחקים" היא ענף מתמטי העוסק במידול ובניתוח מצבי החלטה שבהם משתתפים מספר מקבלי החלטות (שחקנים) שלהם מטרות שונות, וההחלטה של כל אחד עשויה להשפיע גם על התוצאות לגבי כל מקבלי ההחלטות האחרים. מצבים אלה נקראים מצבי החלטות אינטראקטיביות, שכן יש אינטראקציה בין ההחלטות של השחקנים השונים. התורה בונה מודלים מתמטיים לתיאור סיטואציות כאלו, חוקרת אותם ומנסה לנבא את התנהגות השחקנים ולעתים גם להציע למקבלי ההחלטות דרכים להגשים את מטרותיהם.

יסודות התורה הונחו ב-1944 בספרם של המתמטיקאי John von Neumann והכלכלן Oskar Morgenstern הנקרא Theory of Games and Economic Behavior. מאז התורה התפתחה רבות וכיום היא מיושמת בתחומים שונים. להלן כמה מתחומים אלה ודוגמאות לשאלות מהתחומים השונים שבהם עוסקת תורת המשחקים.

- **כלכלה תאורטית.** דוגמה למשחק הינו שוק שבו מוכרים מנסים למכור את מרכולתם לקונים. כל מוכר קובע את מחיר המוצרים שאותם הוא מנסה למכור, וכל קונה מחליט מאיזה מוכר יקנה איזה מוצר ובאיזו כמות. מספר שאלות שתורת המשחקים מנסה לענות עליהן הן ניבוי המחיר שייקבע למוצרים, הביקוש לכל מוצר, והקשר שבין המחיר לביקוש. דוגמה שנייה למשחק הינו מכרוז. כל משתתף קובע את המחיר שאותו הוא יציע, והחפץ המוצע למכירה ניתן למשתתף שהציע את המחיר הגבוה ביותר. תורת המשחקים מנסה לנבא את ההצעה שכל משתתף ייתן, את תוחלת הרווח שעל המוכר לצפות לקבל, וכיצד תשתנה תוחלת זו אם תשתנה שיטת המכרוז שבה החפץ נמכר.

- **רשתות.** העולם המודרני הוא עולם מרושת; רשתות האינטרנט והטלפונים הניידים הן דוגמאות מובהקות לכך. כל משתמש ברשת מעוניין לקבל שירות טוב ביותר (לשלוח כמות גבוהה יותר של מידע בזמן קצר יותר ברשת האינטרנט, או לשוחח באיכות טובה יותר ברשת הטלפוניה) תוך כדי הוזלת העלות. לכל משתמש ישנם משתני החלטה שונים (לדוגמה, ספק האינטרנט או חברת הטלפוניה שאליה יתחבר, שאף הם שחקנים במשחק, שכן הם קובעים את מחיר השירות שהם מספקים), ותורת המשחקים מנסה לנבא את התנהגות השוק. המשחק מנקודת מבטם של נותני השירות מורכב יותר, שכן הם יכולים לשתף פעולה ביניהם (לדוגמה, חברות טלפונים יכולות להשתמש אחת בתשתיות של החברה השנייה להעברת שיחות כדי להוזיל עלויות), וגם כאן מנסה תורת המשחקים לנבא אילו שיתופי פעולה ייווצרו, וכן להמליץ על דרך "הוגנת" לתשלום בגין שיתוף

## פעולה כזה.

• **מדעי המדינה.** בעת הרכבת קואליציה לאחר בחירות משחקות המפלגות משחק שתוצאתו היא יצירת קואליציה שבה משתתף חלק מהמפלגות, אשר מחלקות ביניהן את משרדי הממשלה ותפקידי שלטון אחרים, כגון יו"ר הכנסת ויושבי ראש ועדות הכנסת השונות. תורת המשחקים מפתחת אינדקסים המודדים את כוחה של כל מפלגה. אינדקסים אלה יכולים לבא או להסביר את חלוקת התיקים ועמדות השלטון לאור תוצאות הבחירות. ענף אחר של התורה מציע דרכים שונות לעריכת בחירות וחוקר תכונות של שיטות בחירות שונות.

• **תורת הלחימה.** משחק לחימה קלאסי הוא משחק רדיפה בין טיל ומטוס. מה היא אסטרטגיית הרדיפה הטובה ביותר? מה היא אסטרטגיית ההתחמקות הטובה ביותר? דוגמה שנייה בתחום זה היא משחק חיפוש הברחות בשדה התעופה. על הבודקים בשדה התעופה להחליט אילו נוסעים ייבדקו, ועל המבריח להחליט בידי איזה נוסע לשלוח את החומר שהוא מנסה להבריח. תרומה חשובה של תורת המשחקים לתחום הלחימה היא עצם הצורך לחשוב בצורה אסטרטגית: כדי להחליט מה עליך לעשות, שים עצמך במקומו של יריבך וחשוב מה הוא יעשה ומדוע, ביודעו שגם אתה חושב אסטרטגית וגם אתה שם את עצמך במקומו.

• **ביולוגיה.** בעלי חיים וצמחים אף הם משחקים משחקים. האבולוציה 'קובעת' לפרחים אסטרטגיות למשיכת חרקים העוזרים להאבקתם, ולחרקים היא קובעת אילו פרחים יבקרו. עיקרון "שרידות המתאים ביותר" של דרווין הוא בבסיסו עיקרון של תורת המשחקים, הקובע כי רק אורגניזם עם התכונות התורשתיות המתאימות ביותר לתנאים השוררים בסביבה ישרוד. תורת המשחקים מסבירה, לעתים בצורה מפתיעה, תופעות הנצפות בטבע.

לתורת המשחקים השלכות על תחומים נוספים. בפילוסופיה היא תורמת להבנת מושגים הקשורים למוסר ולצדק חברתי, בפסיכולוגיה היא מעלה שאלות בנוגע להתנהגות בני אדם בסיטואציות שונות, ולמתמטיקה תורת המשחקים קשורה בחבל הטבור: בחקר מודלים של תורת המשחקים משתמשים בכלים מתמטיים מגוונים, החל מהסתברות וקומבינטוריקה וכלה במשוואות דיפרנציאליות וטופולוגיה אלגברית, ולעתים ניתוח מודלים מסוימים מחייב פיתוח כלים מתמטיים חדשים.

באופן מסורתי יש הבחנה בין שני סוגי משחקים: משחקים לא שיתופיים (Non Cooperative Games) ומשחקים שיתופיים (Cooperative Games). מבלי להיכנס להגדרות מדויקות, ניתן לומר שבמשחקים לא שיתופיים פועלים השחקנים באופן עצמאי, כשכל שחקן מנסה להשיג את התוצאה הרצויה לו ביותר על פי העדפותיו. במשחקים שיתופיים נוספת למבנה זה האפשרות של שחקנים לעשות הסכמים מחייבים לפעולה מתואמת. מנגנונים הכופים הסכמים כאלה יכולים להיות בתי משפט, נורמות התנהגות וכו'. תורת המשחקים אינה עוסקת בטיבם או בהצדקתם של מנגנונים אלה; המודל של משחק שיתופי מניח את קיומם, ובודק את השפעתם על תוצאות המשחק.

קל להיווכח שאין אלו קטגוריות מוגדרות היטב, ולעתים קרובות לא ברור לאיזו קטגוריה שייך מצב מסוים של משחק. בקונפליקטים רבים אנו מזהים אפיונים של משחקים שיתופיים וגם

משחקים לא שיתופיים. די ברור כיום שתורת משחקים שלמה יותר תכיל בהכרח שילוב של מרכיבים משני המודלים גם יחד. עם זאת, כדי להציג את הרעיונות העיקריים בצורה בהירה וממוקדת, נוח להיצמד בשלב ראשון לחלוקה זו, ולהציג כל אחד משני המודלים בנפרד.

## 0.2. הספר והשימוש בו

מטרתו העיקרית של הספר היא לשמש ספר לימוד בסיסי של פרקים בתורת המשחקים. מטרה משנית היא לחשוף את התלמידים המתעניינים בתחום למגוון נושאים מתקדמים. מכיוון שמגוון התחומים הבסיסיים רחב, ומורים שונים בוחרים ללמד נושאים שונים בקורס הבסיסי, כתבנו את הספר כאוסף של פרקים בלתי תלויים זה בזה ככל האפשר, כדי שמורה יוכל להרכיב מהם קורס לפי טעמו. כל אחד מהפרקים מתחיל מהיסודות ומגיע קצת רחוק יותר ממה שאפשר לכתוב "מינימום הכרחי", כדי שלמורה תהיה בחירה אם ללמד רק את החומר ההכרחי, להעמיק בחומר, או לבקש מהתלמידים להשלים חומר בקריאה עצמית או בסמינר מודרך. רוב הפרקים מכילים גם חומר המתאים לקורס מתקדם יותר. מפאת קוצר היריעה, החומר המוצג אינו כולל כמובן את כל התוצאות בתחום, ובסוף כל פרק אנו מפנים את הקורא לספרים נוספים, שבהם ניתן להעמיק בתחום. לכל אחד מהפרקים הוספנו תרגילים – רובם קלים למדי, וחלקם מתקדמים וקשים יותר.

אפשר להשתמש בספר להוראת קורסים שונים בתורת המשחקים, בהתאם לרמת התלמידים, לזמן העומד לרשות המורה ולנושא הקורס. כפי שהזכרנו קודם החומר המופיע בפרקים השונים מקיף ברוב המקרים יותר מאשר מורה יבחר ללמד בקורס. משום כך יש לתכנן בזהירות אילו פרקים ללמד ואילו נושאים לבחור מכל פרק. לדוגמה, ניתן ללמד את החומר על משחקים בצורה אסטרטגית ללא לימוד החומר על משחקים בצורה רחבה או על תורת התועלת, וניתן ללמד את החומר על משחקים עם אינפורמציה לא מלאה ללא לימוד החומר על מודלים של אינפורמציה לא מלאה. ניתן להשתמש בספר ללימוד קורסים סימסטריאליים, בסיסיים או מתקדמים, במשחקים שיתופיים, במשחקים לא שיתופיים, קורס כללי בתורת המשחקים, קורס ביישומים של תורת המשחקים ועוד.

כדי לענות על המטרה המשנית הוספנו לספר פרקים מתקדמים, כמו משחקים עם אינפורמציה לא מלאה (פרק 9), מרחב האמונות האוניברסלי (פרק 11), מכרזים (פרק 12) ומשחקים חוזרים עם תשלומים וקטוריים (פרק 14). בנוסף לכך, בפרקים רבים הוספנו חומר מתקדם.

הספר נכתב על ידי מתמטיקאים והכתיבה הינה באוריינטציה מתמטית. כל המשפטים המופיעים בספר מובאים עם הוכחות מלאות. עם זאת, מכיוון שזהו ספר לימוד, כל המושגים המוגדרים מובהרים על ידי דוגמאות רבות, שמטרתן להוסיף אינטואיציה ומוטיבציה ככל האפשר.

על ידי בחירה מתאימה של החומר ניתן ללמד על פי ספר זה הן תלמידים בעלי ידע מתמטי מבוסס והן תלמידים עם ידע מתמטי מינימלי. כדי שהספר יהיה שלם, אנו מביאים בנספח הוכחות של משפטים שבהם אנו משתמשים בספר: משפט Brouwer, משפט Kakutani, משפט KKM (Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz) ומשפט המישור-העילי המפריד, וכן מביאים

אנו סקירה של תכנון לינארי. מורה הקורס יכול להוכיח בכיתה כל אחד ממשפטים אלה, לתת אותם לקריאה עצמית ולתרגול, או לחילופין לנסח את המשפט הנדרש בלבד ללא הוכחה בידועו שחומר זה יילמד בקורסים אחרים.

### 0.3. מבנה הספר

החלק הראשון של הספר (פרקים 1-14) מוקדש לתורה הלא-שיתופית, והחלק השני (פרקים 16-19) מוקדש לתורה השיתופית. פרק 15 מוקדש לבחירה חברתית, פרק 22 מוקדש לשידוכים יציבים ופרק 23 מוקדש לנספחים. נתאר עתה בקצרה את תוכן הפרקים השונים.

פרק 1, משחק השחמט: בפרק זה מתוארים המושגים הבסיסיים של משחקים בצורה רחבה, כולל משפט פון-נוימן על משחק השחמט.

פרק 2, תורת התועלת: בפרק זה מוצגת תורת התועלת של פון-נוימן ומורגנשטרן.

פרק 3, משחקים בצורה רחבה: בפרק זה מוגדר המודל של משחקים בצורה רחבה. תחילה מוגדר המודל הבסיסי ללא מהלכי גורל וקבוצות ידיעה.

פרק 4, משחקים בצורה אסטרטגית: בפרק זה מוגדרים המודל של משחקים בצורה אסטרטגית, שנקראת גם הצורה הנורמלית, והמושגים של שיווי משקל נאש ושל רמת הביטחון של שחקן.

פרק 5, אסטרטגיות מעורבות: בפרק זה מוגדרת ההרחבה של משחק לאסטרטגיות מעורבות, מנוסח ומוכח משפט נאש בדבר קיום שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות. אנו דנים בין השאר גם בחישוב נקודות שיווי משקל ובאסטרטגיות יציבות אבולוציוניות.

פרק 6, אסטרטגיות התנהגות ומשפט קיון: בפרק זה מוגדרים המושגים של אסטרטגיות התנהגות ושל משחקים עם זיכרון שלם, ומנוסח ומוכח משפט קיון.

פרק 7, עידונים של מושג שיווי המשקל: בפרק זה מוצגים המושגים של שיווי משקל תת-משחקי משוכלל ושיווי משקל משוכלל. כמו כן יש בפרק דיון בהצדקה של מושג האינדוקציה לאחור והשימוש שלו בתורת המשחקים.

פרק 8, שיווי משקל מתואם: בפרק זה מוגדר מושג שיווי המשקל המתואם ונלמד הקשר בין קבוצת שיווי המשקל המתואמים לקבוצת שיווי המשקל בהרחבה של המשחק למשחק עם אינפורמציה לא מלאה.

פרק 9, משחקים עם אינפורמציה לא מלאה והתפלגות אפריורית משותפת: בפרק זה מוצג מודל אומן של אינפורמציה לא מלאה, תחילה מודל הכולל רק את מושג הידיעה ולאחר מכן מודל הכולל גם אמונות, ומוכח משפט ההסכמה של אומן. לאחר מכן מוצגים משחקי הרסני עם אינפורמציה לא מלאה ומושג שיווי המשקל הביזיאני. בהמשך מוכחת השקילות בין שיווי משקל נאש במודל הרסני (או אומן) לשיווי משקל ביזיאניים.

פרק 10, משחקים עם אינפורמציה לא מלאה ללא התפלגות אפריורית משותפת: בפרק זה

מוצגים מודלים של אינפורמציה לא מלאה ללא התפלגות אפרורית משותפת, ומוצג מושג שיווי המשקל הביזיאני במקרה כזה.

פרק 11, מרחב האמונות האוניברסלי: בפרק זה אנו בונים את מרחב האמונות האוניברסלי. למיטב ידיעתנו זו הפעם הראשונה שבה מופיעה בנייה זו בספר לימוד בתורת המשחקים בצורה פשוטה המתאימה לתלמיד תואר שני במתמטיקה.

פרק 12, מכרזים: בפרק זה מוגדר מכרז, מחושבות אסטרטגיות שיווי משקל במספר שיטות מכרזים ומוצג משפט שקילות הרווח. לאחר מכן מוגדר מנגנון מכירה ומוכח משפט אפיון של מנגנון המכירה האופטימלי.

פרק 13, משחקים חוזרים: בפרק זה מוגדר המודל של משחקים חוזרים ומוצג המשפט העממי בשלוש הערכות של זרם התשלומים המתקבל: המשחק הסופי, המשחק המהוון ושיווי משקל אחידים.

פרק 14, משחקים חוזרים עם תשלומים וקטוריים: בפרק זה מוגדרים המודל של משחקים חוזרים עם תשלומים וקטוריים שהוצג ב-Blackwell [1956] והמושגים של קבוצה בת-השגה וקבוצה בת-מניעה. מנוסח ומוכח תנאי גיאומטרי המבטיח כי קבוצה היא בת-השגה, והתורה מיושמת עבור משחקים חוזרים עם אינפורמציה לא מלאה ועבור הבעיה של בחירת מומחה בבעיית החלטה חוזרת עם מומחים. גם כאן, למיטב ידיעתנו, זו הפעם הראשונה שבה מופיעה בנייה זו בצורה פשוטה המתאימה לתלמיד תואר שני במתמטיקה.

פרק 15, בחירה חברתית: בפרק זה מוצג המודל של בחירה חברתית ומוכיחים את משפט האי-אפשרות של Arrow ואת משפט האי-אפשרות של Gibbard and Satterwaite.

פרק 16, משחקי מיקוח: בפרק זה מוגדרים משחקי מיקוח, מוצגים עקרונות נאש לפתרון משחקי מיקוח ומשפט האפיון של פתרון נאש. לאחר מכן אנו בודקים פתרונות המקיימים אוספים אחרים של עקרונות הכוללים עקרונות מונוטוניות שונים.

פרק 17, משחקים בצורה קואליציונית: בפרק זה מוצג המודל של משחקים בצורה קואליציונית ומדגימים אותו בעזרת מספר משפחות של משחקים כאלה.

פרק 18, הליבה: בפרק זה מוגדר מושג הליבה ומוכיחים את משפט בונדרבה-שפלי. אנו משתמשים במשפט זה כדי להוכיח כי למשחק ליבה לא ריקה, אם ורק אם הוא משחק שוק. בנוסף אנו דנים במשחקים אדיטיביים, בתכונת העקביות של הליבה, במשחקים קמורים, במשחקי עץ פורש ובמשחקי זרימה.

פרק 20, ערך שפלי: בפרק זה מוצגים העקרונות המגדירים את ערך שפלי ומאפיינים אותו. אנו מיישמים אותו כמדד כוח, מוכיחים כי במשחקים קמורים ערך שפלי נמצא תמיד בליבה, בודקים את העקביות של ערך שפלי ומציגים את נוסחת האלכסון.

פרק 19, קבוצת המיקוח: בפרק זה מגדירים את קבוצת המיקוח ומוכיחים שהיא מכילה את הגרעינון.

פרק 21, הגרעינון: בפרק זה מוגדר הגרעינון ומוכיחים כי הוא תמיד קיים. אנו מוכיחים

את משפט קולברג המאפיין את הגרעינון, מראים כי זהו מושג פתרון עקבי, ופותרים את בעיית Isbell בדבר הגרעינון של משחקי רוב משוקלל. לבסוף אנו מציגים בעיות פשיטת רגל ומראים כי פתרון הרב נתן של בעיית פשיטת רגל מתלכד עם הגרעינון של משחק מתאים הנגזר מהבעיה.

פרק 22, שידוכים יציבים: בפרק זה מגדירים את המודל של שידוכים יציבים, מציגים את האלגוריתם של Gale and Shapley למציאת שידוך יציב ואת המבנה הסריגי של קבוצת השידוכים היציבים, ומביאים מספר הכללות של המודל.

פרק 23, נספחים: בפרק זה מוכיחים את הלמה של Sperner ובאמצעותה את משפט Brouwer. בעזרת משפט זה אנו מוכיחים את משפט Kakutani ואת משפט KKM (Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz). אנו מוכיחים גם את משפט המישור העילי המפריד ומביאים סקירה של תכנון לינארי.

## 0.4. סימונים

בספר סימונים רבים, והשתדלנו להיצמד לסימונים המקובלים ולהיות עקביים לאורך כל הספר. קואורדינטות של וקטור מופיעות כאינדקס תחת  $x = (x_i)_{i=1}^n$ , בעוד שהאינדקסים של איברי סדרה הם אינדקסים עיליים  $x^1, x^2, \dots$ . אינדקס של שחקן תמיד יופיע כאינדקס תחת, בעוד שאינדקס הזמן (במשחקים חוזרים) מופיע כאינדקס עילי.

סוף הוכחת משפט מסומן ב- $\blacksquare$  וסוף הוכחת משפט עזר מסומן ב- $\blacktriangle$ . סוף דוגמה וסוף הערה מסומנים ב- $\blacklozenge$ .

רשימה מלאה של כל הסימונים בספר מופיעה בעמוד 985.

## 0.5. תודות

רבים וטובים עזרו בהכנת הספר, ולכולם אנו מודים. אהוד לרר שתרם תרגילים וענה על שאלות שהתעוררו במהלך הכתיבה, עוזי מוטרן על הערותיו לכתיבת הסעיף על אסטרטגיות יציבות אבולוציוניות, דב סמט על הערותיו לכתיבת מספר פרקים ועל התרגילים שתרם, גוני אורשן, צחי גלבוץ, טאקו הוקוטר, סרג'יו הרט, רקש וורה, אביעד חפץ, יאיר טאומן, רידה לרקי, נמרוד מגידו, אברהם נוימן, פטר סודהולטר, בצלאל פלג, ויג'יי קרישנה ודוד שמידלר שענו על שאלות שהתעוררו במהלך הכתיבה, רון ארטשטיין, מייק הוכמן, סיון טולדו, צפריר כהן, רמה פורת ז"ל, דקל צור ודן קניגסברג שפתרו בעיות שונות בנוגע לשימוש ב-latex בעברית, וסטודנטים וחברים רבים שקראו את הטקסט, הציעו שיפורים ותרגילים ומצאו שגיאות, ביניהם רונן אלדן, איתי אריאלי, גלית אשכנזי, שני בר-גרא, טל גלילי, זורית ורמוז, רועי טפר, אסף כהן, מאיה לירן, אילה משיח-יעקבי, נועה ניצן, ירון עזריאלי, עמרי סולן, רון סולן, אלון

עמית, גדי פיביך, דורי ראובני, ערן שמעיה וארז שיינר.

אנו מודים מקרב לב לחנה משלר, שעברה על הטקסט מבחינה לשונית ודאגה להאחדת הכתיב, לאילה משיח-יעקבי שקראה את הספר, הציעה שיפורים ופתרה את התרגילים, ולרמה פורת ז"ל שעזרה להביא את הטקסט לצורתו הנוכחית. עזרתן לא תסולא בפז.

לסיום, אנו מודים למרכז לחקר הרציונליות באוניברסיטה העברית בירושלים, על הסיוע הרב והעזרה הכספית שהגיש לאורך כל הדרך.

בספר השתדלנו לשמור על כללי הכתיב חסר הניקוד של האקדמיה ללשון העברית, אם כי חרגנו במקומות מסוימים לגבי הכתיב של מספר מילים מפאת טעמנו האישי.

ברור לנו שעדיין יש בספר טעויות ואי-דיוקים שונים, ותודתנו נתונה מראש לכל מי מהמשתמשים בספר שיביא אותם לידיעתנו (אילון סולן: [eilons@post.tau.ac.il](mailto:eilons@post.tau.ac.il)) על מנת שהמהדורה הבאה של הספר תהיה טובה יותר.