

תוכן עניינים

11	הקדמה
	פרק 1: המספרים הממשיים
13	1. מונחים מתורת הקבוצות
17	2. תיאור גיאומטרי של המספרים השלמים, הרציונלים והממשיים
23	3. קטעים על הישר הממשי
26	4. קבוצות חסומות
	פרק 2: מבוא לפונקציות
31	1. מושג הפונקציה
33	2. ייצוגים שונים של פונקציות
36	3. מקרה פרטי: סדרה של מספרים ממשיים
38	4. שוויון בין פונקציות/סדרות
39	5. דוגמאות לפונקציות
41	6. פעולות אלמנטריות בפונקציות
	פרק 3: מיון פונקציות
43	1. פונקציה זוגית/אי זוגית
49	2. פונקציה מחזורית
50	3. פונקציה חד חד ערכית
53	4. פונקציה על
55	5. פונקציה מונוטונית
57	6. פונקציות חסומות
	פרק 4: גבול של פונקציה/סדרה באינסוף – גבול סופי
59	1. משמעות המושג: גבול סופי באינסוף
61	2. הגדרת קושי של גבול סופי של פונקציה באינסוף
66	3. גבול סופי של פונקציות ב $-\infty$ –
69	4. משמעות גיאומטרית של גבול סופי באינסוף
72	5. אי קיום גבול סופי באינסוף
75	6. דוגמה להוכחת טענות לפי הגדרת הגבול
76	פרק 5: גבול סופי באינסוף – תכונות ומשפטים
	פרק 6: גבול באינסוף – גבול במובן הרחב
86	1. הגדרת קושי לגבול של פונקציה באינסוף במובן הרחב
88	2. משמעות גיאומטרית של הגבול במובן הרחב
90	3. הגדרת קושי של הגבול במובן הרחב – מקרים נוספים
93	4. אי קיום גבול באינסוף במובן הרחב

פרק 7: גבול באינסוף במובן הרחב – תכונות ומשפטים

1. משפטים אודות הגבול באינסוף במובן הרחב
2. אי וודאויות בחישובי גבולות

96
105

פרק 8: תתי סדרות והגדרת היינה

1. תתי סדרות
2. הגדרת גבול של פונקציה באינסוף לפי היינה
3. המספר e
4. הוכחת אי קיום הגבול באינסוף לפי היינה
5. שקילות הגדרת קושי והגדרת היינה

107
111
113
115
116

פרק 9: גבול של פונקציה בנקודה – גבול סופי

1. משמעות המושג : גבול סופי של פונקציה בנקודה
2. הגדרת קושי לגבול של פונקציה בנקודה
3. הגדרת היינה לגבול סופי של פונקציה בנקודה
4. אי קיום גבול סופי של פונקציה בנקודה

117
120
124
125

פרק 10: גבול סופי בנקודה – תכונות ומשפטים

129

פרק 11: הגדרת הגבול בנקודה במובן הרחב

1. הגדרת קושי לגבול של פונקציה בנקודה במובן הרחב
2. אריתמטיקה של גבולות בנקודה במובן הרחב
3. אי וודאות בחישובי גבולות
4. גבולות חד צדדיים
5. משמעות גיאומטרית של גבול בנקודה במובן הרחב

135
137
139
140
147

פרק 12: רציפות בנקודה

1. הגדרת המושג רציפות בנקודה
2. רציפות חד צדדית
3. מיון נקודות אי רציפות
4. תכונות ומשפטים אודות פונקציות רציפות
5. רציפות בקטע
6. המשפטים היסודיים של פונקציות רציפות בקטע סגור

149
153
156
158
163
164

פרק 13: נגזרת של פונקציה

1. מושג הנגזרת בנקודה
2. אי קיום נגזרת בנקודה
3. גזירות חד צדדית
4. גזירות בקטע
5. הפונקציה הנגזרת
6. טבלת נגזרות של פונקציות אלמנטריות
7. חישובי נגזרות
8. הקשר בין רציפות בנקודה לבין גזירות בנקודה
9. הגדרת הפונקציה ההפוכה
10. הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות
11. נגזרת של פונקציה הפוכה
12. גזירה לוגריתמית

170
173
176
180
180
183
183
187
190
195
196
199

200	13. נגזרות מסדר גבוה
	פרק 14: המשפטים היסודיים של החשבון הדיפרנציאלי
202	1. משפטי ערך ביניים (פרמה, רול לגרנג' וקושי)
214	2. כלל לופיטל
	פרק 15: שימושים של נגזרת – קירובים
221	1. קירוב לינארי ודיפרנציאל
225	2. קירוב טיילור מסדר n
232	3. שגיאת הקירוב של פולינום טיילור
235	4. פולינום טיילור של סכום פונקציות, כפל פונקציה בפולינום
236	והרכבה של פונקציות
	5. שימושים של פיתוח טיילור
	פרק 16: שימושים של נגזרת – חקירת פונקציה
241	1. חקירת קיצון מקומי (לוקלי) של פונקציה
245	2. קמירות של פונקציה ונקודת פיתול
251	3. חקירת קיצון מוחלט (גלובלי) של פונקציה בתחום
253	4. אסימפטוטות של פונקציה
257	5. חקירה מלאה של פונקציה
	פרק 17: האינטגרל הלא מסוים
261	1. הגדרת מושג האינטגרל הלא מסוים
262	2. חישוב אינטגרלים לא מסוימים
263	3. אינטגרציה על-ידי הצבה
265	4. אינטגרציה בחלקים
267	5. אינטגרציה של פונקציות רציונליות
276	6. הצבות מיוחדות
	פרק 18: סכומי רימן ודרבו; הגדרת האינטגרל המסוים
282	1. סכום רימן ואינטגרל מסוים
289	2. משפחות של פונקציות אינטגרליות
290	3. סכומי דרבו
	פרק 19: האינטגרל המסוים – תכונות
294	1. תכונות האינטגרל המסוים
304	2. שימושים של האינטגרל המסוים
	פרק 20: האינטגרל הלא אמיתי
310	1. הגדרה של אינטגרלים עם גבולות אינטגרציה אינסופיים
313	2. מבחני התכנסות לפונקציות בעלות סימן קבוע בקטע אינטגרציה אינסופי
316	3. התכנסות בהחלט של אינטגרלים עם גבולות אינטגרציה אינסופיים
317	4. הגדרה של אינטגרלים עם גבולות אינטגרציה סופיים של פונקציה לא חסומה
321	5. מבחני התכנסות לפונקציה לא חסומה בקטע סופי
322	6. התכנסות בהחלט של אינטגרלים של פונקציה לא חסומה בקטע סופי
322	7. אינטגרלים עם גבולות אינטגרציה אינסופיים של פונקציה לא חסומה בקטע האינטגרציה
325	מפתח מושגים

הקדמה

הסטודנט בעידן המודרני עומד בפני אתגר חשוב למדל תהליך ייצור, תהליכים כלכליים, ביולוגיים ופיזיקליים כמו כן עליו גם למצוא את הפתרון לבעיית המודל. החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי הוא אחד הכלים הבסיסיים והחשובים להתמודדות עם מטרות אלו והוא מסייע בתחומי המחקר המדעי. חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי הם תורה העוסקת במושגים הקשורים לגדלים הקטנים באופן אינסופי, כמו גבולות, רציפות, נגזרת, אינטגרלים. הדוגמה הבסיסית לשימוש בתורה זו היא חקירת תכונות אלגבריות וגיאומטריות של פונקציות, חישוב שטחים ונפחים של גופים גיאומטריים.

אנו צוות של מרצים ותיקים אשר נחשף לקשיי הסטודנטים בלימוד חדו"א בשנה הראשונה במסודות להשכלה גבוהה. החל משנת 2002 ניסינו בהדרגה להכניס שיפורים בהגשת החומר הנלמד, תוך התחשבות בהרגלי הלמידה המגוונים של הסטודנטים בתקופה המודרנית. השינויים שהכנסנו עמדו במבחן המציאות בשטח והניבו תוצאות הן בהישגי הסטודנטים והן בתחושתם במהלך הקורס. בספר שכתבנו כללנו את כל הפיתוחים שהוכיחו את עצמם במהלך ההוראה והלימוד.

הספר מאפשר לסטודנט ליצור מושגים באמצעות בנייה אינדוקטיבית ודוגמאות. בטרם ניסוח מסקנות ומשפטים מתבצע חקר המושג או התופעה. דגש רב ניתן בספר לייצוגיות רבת פנים ולגרפיקה. באמצעות החקר בשלב מוקדם עוד לפני פתרון שאלות טכניות, מתאפשרת התמודדות עם תפיסות שגויות האופייניות ללומד בראשית דרכו המדעית. בספר קיים דגש על קישורים בין הנושאים השונים המאפשרים לקורא לקבל תמונה כוללת. לדוגמה: מושג הסדרה וגבול הסדרה מוצגים כמקרה פרטי של מושג הפונקציה וגבולה. לרוב נושא הסדרות וגבולן נלמד כנושא נפרד בקורס לפני נושא הפונקציות וגבולן. וכך סטודנטים מתייחסים לגבול של פונקציה כנושא חדש ואינם מוצאים קשר בין לבין נושא הגבול של סדרה.

ספר זה יאפשר למרצה ולסטודנט לבחון היבטים רבים בתורת החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי הוותיק באמצעות כלים חדשים ופדגוגיה ההולמת את המחקר בהוראת המדעים והכלים האינטרנטיים העומדים לרשותנו כיום.

אנו מבקשים להודות לפרופ' ח'י מרק ילין על הבדיקה המקצועית והמדוקדקת של התכנים המתמטיים בספר, ולגריה רעיה קרדמן על הערות חשובות שתרמה