תוכן העניינים

הקדמה

האלגברה המודרנית (כפי שהתפתחה בראשית המאה ה-20) שואפת לכנס תחת קורת-גג אחת דוגמאות שונות בעלות סממנים דומים, לזקק את המשותף להן באמצעות אקסיומות המגדירות **מבנה אלגברי**, ולהוכיח משפטים כלליים על אותו מבנה, שיהיו ישימים בכל אחת מהדוגמאות. בקורסים באלגברה לינארית למדנו על שדות ועל מרחבים וקטוריים. ראינו כיצד תובנות מאנליזה וקטורית ב-$\mathbb{R}^2$ או ב-$\mathbb{R}^3$ ניתנות להכללה גם למרחבים וקטוריים מעל שדות סופיים, או למרחבים אינסוף-ממדיים.

בחלק הראשון של הספר נעסוק במושג **החבורה**, שהוא מושג מרכזי ברבים מענפי המתמטיקה והמדע בכלל. אי אפשר להתקדם היום בתורת המספרים, בפיזיקה של אנרגיות גבוהות או בקריסטלוגרפיה בלי תורת החבורות. תורת החבורות התבררה ככל-כך מרכזית לענפי הגאומטריה השונים, עד שפליקס קליין ניסה להעמיד עליה את כל יסודות הגאומטריה ב"תכנית ארלנגן" (Erlangen) שפרסם בשנת 1872.

בחלקו השני של הספר נכיר מושג נוסף – **החוג** – שגם לו תפקיד מרכזי ברוב תחומי המתמטיקה, ובמיוחד בתורת המספרים ובגיאומטריה אלגברית.

בחלק השלישי נדון בתורת השדות וביהלום שבכתר – תורת גלואה. תורה זו פותחה במאה ה-19 על-ידי מספר מתמטיקאים שעיקריים שבהם נילס אבל (Abel) ואווריסט גלואה (Galois). האחרון מצא את מותו הטראגי בגיל 21, אבל הספיק להשאיר מורשת ששינתה את פני האלגברה המודרנית והשפיעה רבות על תחומים רבים במתמטיקה. תורה זו, שגילתה קשר עמוק בין שני נושאים לכאורה שונים: פתרון משוואות פולינומיאליות מעל שדות מחד ותורת החבורות מאידך, מהווה את אחת מפסגות ההישגים של המתמטיקה לאורך הדורות. היא גם זו המאגדת את חלקי הספר ליחידה אחת.

בהצגת הנושאים השונים השתדלנו לפרט ולהביא את מרבית ההוכחות המרכזיות במלואן. אולם במכוון השארנו לעתים חלקים מההוכחה לעבודה עצמית כתרגילים. מעבר לחיסכון במקום, הקורא ישכיל, לטעמנו, אם יהיה שותף פעיל בקריאה ויפתור לאורך הדרך את התרגילים שהצגנו, אם מעט ואם הרבה. חלק מהנושאים מוצג על-ידי תרגילים בלבד.

לכל אורך הדרך, דוגמאות ומקרים פרטיים יהוו חלק חשוב מפיתוח התורה. מעבר לעניין שיש ביישומים של המשפטים הכלליים במקרים פרטיים, יש בדוגמאות אלו כדי לעורר שאלות חדשות ולכוון את התפתחות המקצוע.

החומר המכוסה בספר מתאים לתכנית הלימודים בקורסי "מבנים אלגבריים" באוניברסיטה העברית, אולם נסיוננו מראה שלא ניתן לכסות את כולו בהרצאות בכיתה. אנו ממליצים להשאיר חלק מן הנושאים לשיעורי התרגול (למשל, סעיפים 3.5, 6.3.4, 6.4, 10.8, 15.3, 17.3, 18.4.2, 18.4.3 ו-18.5). ייתכן אף שמורים ייאלצו לוותר כליל על חלק מהנושאים, איש איש על פי טעמו והעדפותיו, ועל-פי רמת הכיתה. עם זאת, אנו מאמינים שהספר מאפשר לתלמיד הרוצה בכך ללמוד בעצמו את כלל החומר.

ספר זה נכתב מתוך תחושה שהספרות העברית הקיימת בנושא המבנים האלגבריים הנלמדים כאן היא מצומצמת מדי, והחומר בסיסי מכדי לשלוח תלמידים לספרות הלועזית. עם זאת, ספרי הלימוד באנגלית העוסקים במבנים אלגבריים הם רבים וחלקם מצוינים. לאלו הרוצים להעמיק בחומר ולקרוא על נושאים שאינם מטופלים בספר הנוכחי, אנחנו ממליצים על הספרים הבאים: An Introduction to the Theory of Groups מאת J. J. Rotman (עבור נושא החבורות), הספרים Abstract Algebra ו-Topics in Algebra מאת I. N. Herstein, הספר Basic Algebra I של Jacobson, ספרו המקיף של S. Lang ששמו Algebra, הספר המודרני יותר Abstract Algebra מאת D. S. Dummit ו-R. M. Foote, וכן ספרו המצוין של I. Stewart שעוסק בתורת השדות ובתורת גלואה, שכותרתו Galois Theory. ספרים אלו כתובים ברמות שונות של הרחבה, העמקה וקצב, אך אנו בטוחים שכל תלמיד שיחפוץ בכך יוכל למצוא בהם ספר לטעמו.

חובתנו הנעימה להודות לרבים וטובים שסייעו בידינו בכתיבת ספר זה. שלמי תודה לעובדי הוצאת מאגנס ובראשם יהונתן נדב המנכ״ל ורם גולדברג, שניצח על מלאכת ההפקה, על שיתוף פעולה פורה ומקצועי. הוקרתנו המיוחדת ליאיר גלזנר ולשופט הנוסף של הספר שנותר בעילום שם, אשר עשו עבודת שיפוט מקיפה ומעמיקה, העירו הערות רבות ומועילות וסייעו בידינו ללטש את הגרסא הסופית של הספר. אורטל פלדמן סייע בידינו רבות בחלק הטכני של הכתיבה. שינויים רבים בספר היו פועל יוצא של הערותיו החשובות של אורי ברזנר. רבים אחרים סייעו בידינו, אם על-ידי סיכומי הרצאות, הצעת תרגילים או עצה טובה, אם באמצעות הפניה לחומרים נוספים או מציאת טעויות בגרסאות הקודמות (הטעויות הנותרות – באחריותנו בלבד) ועוד. מבין הרבים נזכיר את ליאור ברי-סורוקר, יתיר הלוי, יונתן הרפז, יונתן יהלום, ספי לדקני, אבינעם מן, אורי פרזנצ׳בסקי, יובל קפלן וענר שלו. נודה, לבסוף, לתלמידינו הרבים במשך השנים שמהם השכלנו יותר מכולם.