

תוכן העניינים

עמוד

א	הקדמה
ב	הקדמה למהדורה הראשונה

פרק א הגדרות דוגמאות תכונות ומושגים יסודיים

	א.1 גרף מהו?
1	תחרות ליגה
2	שושלת יוחסין
4	הגדרות של גרף ומרכיביו
7	ערכיות קדקודים ומספר צלעות בגרף
7	תרגילים לסעיף א.1
	א.2 סוגי גרפים
8	גרף פשוט
8	גרף ריק וגרף שלם
9	גרף רגולרי
9	גרף משלים
10	תרגילים לסעיף א.2
	א.3 גרפים איסומורפים וסוגי גרפים נוספים
12	הגדרה ודוגמאות
13	גרף מישורי
13	גרף דו-צדדי
15	תרגילים לסעיף א.3
18	סיכום לפרק א

פרק ב מסילות ומעגלים בגרפים

20	מבוא
	ב.1 מסילות, קשירות ומעגלים
21	מסילה בגרף
22	גרף קשיר
23	מעגל בגרף
24	משפטים
30	תרגילים לסעיף ב.1
	ב.2 גרפי אוילר - חלק א
32	בעיית הגשרים של קוניגסברג
33	מסילת אוילר ומעגל אוילר - הגדרות
34	משפט אוילר למעגל
36	משפט אוילר למסילה
39	פירוק גרף למסילות זרות
41	תרגילים לסעיף ב.2 - חלק א

	2.ב גרפי אוילר - חלק ב
46	בעיית הדוור הסיני - מעגל אופטימלי בגרף
48	הבעיה והמודל הגרפי שלה
49	אלגוריתם לבניית מעגל אוילר בגרף אוילריאני והוכחתו
53	אלגוריתם למציאת מסילות קצרות ביותר בגרף לא משוקלל והוכחתו
57	תרגילים לסעיף 2.ב - חלק ב

	3.ב גרפי המילטון
59	משחק המילטון
60	מסילת המילטון ומעגל המילטון, הבעיה הכללי
61	גרפי אוילר וגרפי המילטון
61	מעגל המילטון והגרף השלם
64	השמטת קדקודים מגרף והגרף המתקבל
65	תנאי הכרחי לגרף המילטון
67	תנאי מספיק לגרף המילטון - משפט דירק (Dirac)
70	פירוק גרף שלם למסילות המילטון זרות או למעגלי המילטון זרים
73	תרגילים לסעיף 3.ב

77 סיכום לפרק ב

פרק ג עצים

80 מבוא

	1.ג עצים - הגדרות ותכונות יסוד
81	בין כל שני קדקודים בעץ יש מסילה אחת ויחידה
82	כל צלע בעץ היא צלע מפרידה
82	מספר הצלעות בעץ קטן ב-1 ממספר קדקודיו
84	מספר הצלעות ביער קטן ב-k ממספר קדקודיו k, מספר הרכיבים ביער
85	בכל עץ יש לפחות 2 קדקודים שערכיותם 1
87	תרגילים לסעיף 1.ג

	2.ג עצים - צלעות מפרידות ומעגלים
89	צלע מפרידה, הגדרה ודוגמאות
90	צלע בגרף היא מפרידה אם היא אינה מוכלת באף מעגל בגרף
91	גרף קשיר הוא עץ אם כל צלע בו היא צלע מפרידה.
91	גרף הוא עץ אם הוא חסר מעגלים מקסימלי
92	תרגילים לסעיף 2.ג

	3.ג* עץ פורש ועץ אופטימלי
94	בעיית הקישור המינימלי
96	גרף G מכיל עץ פורש אם הוא קשיר
97	עץ אופטימלי
98	האלגוריתם של קרוסקל (Kruskal) והוכחתו
102	**נוסחת קיילי (Cayley)
103	מספר העצים הפורשים ב- K_n הוא n^{n-2}
103	עקרון הספירה
106	בחירה עם החזרה
108	**הוכחה לנוסחת קיילי
112	תרגילים לסעיף 3.ג

116 סיכום לפרק ג

פרק ד רשתות

118

מבוא

ד.1 גרפים מכוונים ובעיית המסלול הקצר

118

גרף מכוון, הגדרות ודוגמאות

120

בעיית המסלול הקצר והמודל הגרפי שלה

123

רעיון הכיוון והמתיחה בגרף

125

*אלגוריתם למציאת מסילה קצרה ביותר

128

**הוכחת האלגוריתם

132

תרגילים לסעיף ד.1

ד.2 בעיית התנועה החד-סטריית

136

הבעיה והמודל הגרפי שלה

138

גרף קשיר חלש וגרף קשיר חזק

139

משפט רובין להפיכת גרף נתון לגרף מכוון וקשיר חזק

142

**אלגוריתם להפיכת גרף נתון לגרף מכוון וקשיר חזק

145

תרגילים לסעיף ד.2

ד.3 רשתות זרימה

147

דוגמא לבעיות ברשתות

150

רשת העברה, הגדרה ודוגמאות

151

זרימה ברשת

153

חתכים

155

זרימה ברשת וכושר העברה של חתך - משפטים

158

משפט הזרימה המרבית והחתך המינימלי, משפט ה-Min-Max

158

צלע קדימה וצלע אחורה במסילה

159

מסילה לא רוויה

159

זרימה מרבית ומסילה לא רוויה

163

משפט פורד ופלקרסון על זרימה מרבית ברשת

164

אלגוריתם של פורד ופלקרסון לזרימה מרבית ברשת

165

דוגמאות לשימוש באלגוריתם והוכחתו

172

מקרים נוספים לבעיות זרימה מרבית ברשת

173

תרגילים לסעיף ד.3

179

סיכום לפרק ד

פרק ה משחקים חידות ותורת הגרפים

183

מבוא

ה.1 האיכר הזאב העז והכרוב

184

החידה

185

מצבים אפשריים ומצבים מותרים בחידה

186

הגרף לתאור המהלכים האפשריים בחידה

187

פתרונות אפשריים לחידה מהגרף

187

תרגילים לסעיף ה.1

ה.2 התיירים והקניבלם

189

החידה

189

פתרון א

193

פתרון ב

194	צלע הלוך וצלע חזור במסילה מכוונת
195	הפתרונות האפשריים
196	תרגילים לסעיף 2.ה
	ה.3 הקוביות הצבועות
197	המשחק
198	תאור גרפי למשחק
200	מסקנות ופתרונות למשחק
203	תרגילים לסעיף 3.ה
	ה.4 השוואת נוחלים
206	החידה ותאורה הגרפי
207	הקדקודים האפשריים המתקבלים בגרף
208	הצלעות האפשריות בגרף
209	מסקנות פתרון הבעיה
212	תרגילים לסעיף 4.ה
	ה.5 מגדל האנוני
212	ניתוח הבעיה
215	גרף של ריבוע ושל קוביה תלת ממדית
216	גרף של קוביה מממד n
218	פתרון לבעיית מגדל האנוני עבור $n=3$
219	פתרון לבעיית מגדל האנוני עבור $n=4$
222	תרגילים לסעיף 5.ה
	ה.6 מבוך ונים
223	בעיות מבוך
224	תאור גרפי למבוך ופתרונות אפשריים
225	משחקי נים
225	משחק נים ותאור גרפי לכל מהלכי המשחק
225	תכונות גרף של משחק נים
227	תרגילים לסעיף 6.ה
229	סיכום לפרק ה
230	סמונים בתורת הגרפים

הקדמה

בהוצאה זו הכנסנו שינויים ושיפורים שונים ובהם: תיקון של שיבושים, השמטות, שגיאות דפוס וכדומה. הוספנו הבהרות במקומות שונים, רשימת סימונים בתורת הגרפים ועוד. כמו כן הכנסנו גם תיקונים מהותיים, לעתים בניסוח ולעתים בדרך של הוכחה או באופן הצגה של משפטים ובעיות.

התיקונים השונים הם על סמך הניסיון המצטבר בהוראת התורה, לפי ספר זה, על ידי המחבר ועל ידי אחרים, בכיתות ובמסגרות שונות ובכללן: חוגי נוער, קורסי העשרה ברמות שונות, הוראה שיטתית וסדירה - כחלק מלימודי המתמטיקה לבגרות - בבי"ס תיכון ובמכינות קדם אקדמיות, השתלמויות מורים למתמטיקה, קורסים אקדמיים לסטודנטים במכללות לחינוך ובמוסדות להשכלה גבוהה ועוד.

יחד עם זאת, בשל מגבלות טכניות, ישנם שינויים ושיפורים רבים שלא נכללו במהדורה זו. אלה יופיעו במהדורה הבאה.

ואכן, בעקבות עבודת המחקר המקיפה שלנו, חוות הדעת של מומחים, לאור הניסיון בהוראת הנושא ולאור הביקוש לספר זה, שיצא עד למהדורה זו בכמות מצומצמת בלבד, אנו מתכננים להוציא מהדורה חדשה מתוקנת ומשופרת, בסדר חדש ובפורמט שונה. מהדורה שתכלול גם תוספות וחיידושים בתוכן, בצורה ובדרך ההגשה.

ספר זה משמש ויכול לשמש סטודנטים למתמטיקה ולמדעי המחשב במכללות לחינוך ובמוסדות אחרים הן כ- Textbook והן כספר עזר ללימוד עצמי או בדרך אחרת. הספר מיועד גם לתלמידי החט"ע בבי"ס תיכון, כאשר הסעיפים והתרגילים המסומנים ב- או ב- הינם בדרגת קושי רבה/רבה מאוד והם מיועדים רק לתלמידים ברמת 5 יח"ל ובחלקם לתלמידי 4 יח"ל, כמפורט בהקדמה למהדורה הראשונה המובאת להלן.

עשינו כמיטב יכולתנו לתקן כל הטעון תיקון ועם זאת נודה מאד לכל מי שיעביר אלינו הערות או הארות שיהא בהן לתקן או לשפר את המהדורה הבאה.

לפרטים נא לפנות:

המחבר: תושיה כפר-מימון, ד.נ. נגב טלפון - 07-9941649
הוצאת אקדמון: האוניברסיטה העברית, הר-הצופים, ירושלים

המחבר

תשנ"ו 1996

ההקדמה למהודרה הניסויית הראשונה

יחידת לימוד זו בתורת הגרפים הינה, למיטב ידיעתנו, הראשונה שנכתבה בגישה זו ובמתכונת הנוכחית, ואשר מטרתה להיות ספר לימוד להוראת תורת הגרפים בבית ספר תיכון בצורה שיטתית ומסודרת. עד כה נלמד קורס זה רק ברמה אקדמאית באוניברסיטאות ובמסגרת דומות אחרות.

הנושאים הכלולים ביחידה, כמו גם אופן הגשתם גובשו על סמך ניסיון המחבר בהוראת תורת הגרפים במסגרות שונות, תיכוניות ואחרות, ובהתייעצות עם אנשי מדע מומחים לדיסציפלינה. למרות כן, מהדורה זו הינה עדיין מהדורה ניסויית ולא סופית, ולכן לא מן הנמנע כי יוכנסו בה שינויים, שיפורים ותיקונים.

באופן כללי היחידה כולה - חמישה פרקים - מיועדת לתלמידי כיתות יא - יב ברמות 3, 4 ו- 5 יחידות לימוד במתמטיקה, ולכל אוכלוסייה אחרת ברמה מתאימה. תלמידים הלומדים ברמה של 4-5 יחידות לימוד ילמדו את כל היחידה בהיקף של כ-60 שעות (2 ש"ש), כשההבדל בין 4 יח"ל ל-5 יח"ל יתבטא בקושי השאלות והבעיות שהם יידרשו לפתור וכן בנושאים אחדים, אבחנה המצויה גם בלימוד החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי. לתלמידים ברמה של 3 יחידות לימוד, יחידת הלימוד תהיה בהיקף של כ-30 שעות (1 ש"ש), כאשר הנושאים המסומנים ב- * (כוכבית) יובאו בפחות העמקה (ובנוסף, תרגילים ומשפטים קשים יושמטו כליל, אלגוריתמים יוכחו בצורה אינטואיטיבית בלבד וכו'). ואילו הנושאים המסומנים ב- ** יושמטו כליל (ובהם: מעגל אופטימלי, נוסחת קיילי, זרימה ברשתות ועוד).

אנו נודה מאוד לכל מי שישלח אלינו הערות, תיקונים או עצות בכל הקשור ליחידה זו.

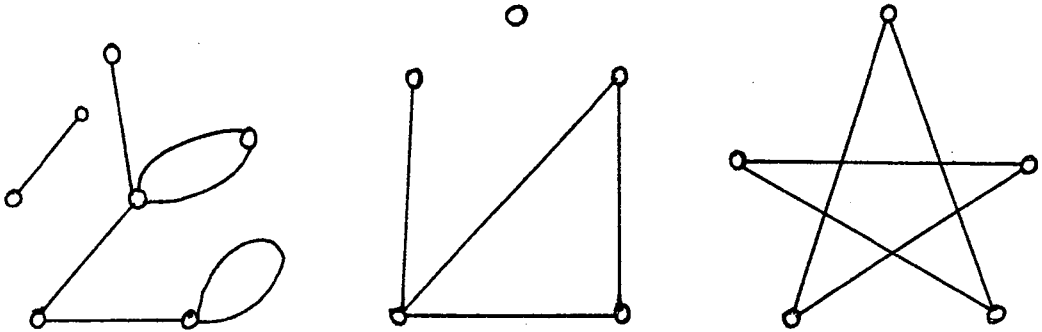
תודתנו לגבי זהבה ניסים ולגבי יהודית רייך מהמחלקה למתמטיקה על עבודת ההדפסה, וכן לגבי רות ביטמן, מהמרכז להוראת המדעים באוניברסיטה, על עזרתה בהוצאת הספר.

המחבר

מבוא

למושג גרף שתי משמעויות שונות בתכלית. משמעות אחת, הנפוצה בקרב רבים, קשורה במה שמכונה "גרף של פונקציה" או "גרף של משוואה אנליטית" והיא כל הנקודות (x, y) במישור המקיימות את הפונקציה או את המשוואה הנתונות. למשל, הגרף של פונקציה ממעלה ראשונה $y = ax + b$ הוא קו ישר. הגרף של המשוואה $x^2 + y^2 = r^2$ הוא מעגל שמרכזו בראשית הצירים ומחוגו r .

אנו לא נעסוק במשמעות זו של גרף אלא במשמעות האחרת שהיא צורה גיאומטרית הבנויה מנקודות וקווים המחברים זוגות מנקודות אלו. הקווים לא בהכרח ישרים, לא בהכרח מחברים כל זוג נקודות ולא בהכרח נקודות שונות. להלן דוגמאות אחדות. הנקודות מסומנות על ידי עיגולים קטנים.



תורת הגרפים החלה במאמר של אוילר (Euler) שפורסם בשנת 1736 בעקבות בעיה - חידה שהוצגה לו - בעית הגשרים של קוניגסברג, אשר היום הינה חידה מפורסמת. במשך כ-100 שנה הנושא היה רדום. במחצית המאה האחרונה החל ענין מחודש בתורת הגרפים עקב בעיות שהתעוררו בענפים שונים של מדעי הטבע. כגון, רשתות חשמל, מבנה מולקולרי ועוד. כן תורגמו בעיות-חדות בעלות גרעין מתמטי לשפת תורת הגרפים - מודל מתמטי ונוסחו מחדש, המפורסמת שבהן היא "בעית ארבעת הצבעים" אשר הוצגה ע"י דה-מורגן (De-Morgan) בשנת 1850 לערך, ועד לאחרונה ממש נותרה כהשערה.

ב-3-4 העשורים האחרונים היה פיתוח מואץ בתורת הגרפים, הן בתחום המחקר האופרטיבי והן בישומים, בתחומים רבים ומגוונים, מתמטיים ושאינם כאלה ובהם: חקר ביצועים, תכנון ליניארי, תקשורת, מדעי המחשב, מעגלים חשמליים, רשתות, תעבורה, כלכלה ועוד.

לתורת הגרפים מעמד מיוחד על פני רבים מענפי המתמטיקה בכך שהיא לא רק ענף מתמטי עצמאי וחשוב, או אף ענף השייך למתמטיקה שימושית, אלא בהיותה בעלת תכונות נוספות אשר לדעתנו מצדיקות ואף מחייבות לכלול אותה בתוכנית הלימודים של בית הספר התיכון. בין התכונות ניתן למנות:

- א. ענף יפה שאינו דורש ידע מתמטי מוקדם.
- ב. תורת הגרפים מבוססת על מספר מועט של עקרונות.
- ג. ענף המשלב הנאה (חידות ושעשועים) ולימוד.

ד. בעל מגוון ישומים רחב ובמגוון תחומים, כולל מדעי הרוח והחברה.
 ה. האפשרות להשתמש בתורת הגרפים כמודלים מתמטיים לבעיות מציאותיות רבות.
 ו. מאפשר לספק "תועלת מידית" תוך כדי הלימוד (לתלמידים השואלים: בשביל מה זה טוב).

תכונות אלו עולות בקנה אחד עם השניות באדיאל החינוכי כפי שבוטאה על ידי בנימין פרנקלין בספר תהליך החינוך: "טוב היה אילו יכולנו ללמדם כל מה שהוא מועיל וכל מה שהוא יפה, אבל המלאכה מרובה וזמנם קצר. לכן יש להציע כי ילמדו אותם הדברים הנראים להיות המועילים ביותר והיפים ביותר".

נושאי הלימוד הכלולים ביחידה הם כאלה המדגימים ומדגישים את התכונות הנ"ל מחד, ומאידך הם כוללים מגוון נושאים המשתלבים ליחידה אחת שיש בה לתת תמונה בסיסית טובה של התורה.

הפרק הראשון עוסק במושגים ותכונות בסיסיים בליווי דוגמאות. הפרק השני דן במסילות ומעגלים בגרפים, גרפי אוילר, גרפי המילטון וישומים שונים. נושא הפרק השלישי הוא עצים, ענף חשוב ביותר בתורת הגרפים בו נדונים תכונות וישומים של עצים. נושא חשוב אחר - גטות הוא נושא הפרק הרביעי ובו נדון ב-3 בעיות עיקריות בעית המסלול הקצר, בעית התנועה החד-סיטרית ומשפט הזרימה המקסימלית והחתך המינימלי. הפרק המסיים את היחידה דן בשלוב חידות, משחקים ותורת הגרפים.

אנו מקוים כי לימוד היחידה אכן ישיג את מטרותיו וישלב לימוד והנאה. כן נשמח לקבל הערות והארות הקוראים.