תוכן עניינים

פתח דבר... 6
מבוא – הגדרות והמשפט היסודי.. 8
פרק 1 – תכונות של נקודות פסקל על צלעות מרובע קמור........................ 16
סעיף א׳: תכונות של נקודות פסקל הנוצרות בעזרת מעגלים מהקבוצה $\{\omega_i\}$.. 16
סעיף ב׳: תכונות המתקיימות במקרה של מעגל המתואם עם נקודות פסקל הנוצרות בעזרתו.. 27
סעיף ג׳: דוגמאות ליישום משפטים מפרק 1.. 40
פרק 2 – הרחבת התיאוריה למקרה של מרובע בר חסימה.......................... 44
סעיף א׳: תנאים הכרחיים ומספיקים למרובע בר חסימה הנקבעים בעזרת מעגל המתואם עם נקודות פסקל הנוצרות בעזרתו................................. 45
סעיף ב׳: תכונות היקף, שטח וחפיפה של מרובעים המוגדרים בעזרת מעגלים היוצרים נקודות פסקל... 54
סעיף ג׳: תנאי הכרחי ומספיק למרובע בר חסימה הנקבע בעזרת מעגל תשע הנקודות... 63
סעיף ד׳: דוגמאות ליישום משפטים מפרק 2.. 71
פרק 3 – תכונות של משיקים למעגל היוצר נקודות פסקל.......................... 76
סעיף א׳: תכונות של משיקים המתקיימות לכל מעגל מהקבוצה $\{\omega_i\}$........... 77
סעיף ב׳: תכונות של משיקים המתקיימות במעגל המתואם עם נקודות פסקל הנוצרות בעזרתו.. 85
סעיף ג׳: דוגמאות ליישום משפטים מפרק 3.. 97
פרק 4 – הרחבת התיאוריה למקרה של מרובע בעל אלכסונים מאונכים.......... 102
סעיף א׳: קיום אינסוף מעגלים היוצרים נקודות פסקל במרובע בעל אלכסונים מאונכים.. 102
סעיף ב׳: תכונות של מעגל נקודות פסקל במרובע בעל אלכסונים מאונכים..... 105
סעיף ג׳: תכונות של קבוצת המלבנים המוגדרים בעזרת מעגלי נקודות פסקל. 119
סעיף ד׳: השוואה בין קבוצת המלבנים $\mathbb{M}_{\odot}$ המוגדרים בעזרת מעגלי נקודות פסקל, לבין קבוצת המלבנים $\mathbb{M}_{\parallel}$, החסומים במרובע $ABCD$, שצלעותיהם מקבילות לאלכסוני המרובע.. 131
סעיף ה׳: יחידות הקבוצה $\mathbb{M}_{\odot}$ כקבוצת המלבנים המוגדרים בעזרת מעגלים היוצרים נקודות פסקל ומעגלי נקודות פסקל.. 135
סעיף ו׳: דוגמאות ליישום משפטים מפרק 4.. 147
פרק 5 – תכונות של מעגלים מאונכים ותכונות של זוגות מעגלים המאונכים למעגל נתון ועוברים דרך נקודה נתונה.. 156
סעיף א׳: תנאים הכרחיים ומספיקים למעגלים מאונכים............................ 156
סעיף ב׳: תכונות של זוגות מעגלים המאונכים למעגל נתון ועוברים דרך נקודה נתונה... 164
סעיף ג׳: תכונות של מעגלים המתואמים זה לזה ביחס למעגל נתון.............. 182
סעיף ד׳: תכונה חדשה של נקודות השייכות למעגל תשע הנקודות.............. 188
סעיף ה׳: דוגמאות ליישום משפטים מפרק 5.. 192

פרק 6 – חבורה מעל קבוצת נקודות פסקל על צלעות מרובע קמור................................ 194
סעיף א׳: מציאת כל המעגלים היוצרים נקודות פסקל................................. 194
סעיף ב׳: הגדרת חבורה מעל קבוצת נקודות פסקל.................................. 199
נספחים.. 205
נספח א׳ – תכונות והגדרות שבהם נעשה שימוש במהלך הספר.................................... 207
נספח ב׳ – שיטת המספרים המרוכבים בהנדסת המישור.. 221
נספח ג׳ – הוכחות אלטרנטיביות והשלמות להוכחות.. 230
ביבליוגרפיה... 244

פתח דבר

ספר זה חוקר קשר חדש בין מרובע ומעגל.
זהו נושא חדש בגיאומטריה אוקלידית שטרם נחקר בעבר.
בספר מוגדרים מושגים חדשים כגון נקודות פסקל, מעגל היוצר נקודות פסקל, מרובע ומלבן המוגדרים בעזרת מעגל זה ועוד. כמו כן מוצגים מעל ל-50 משפטים המתארים את התכונות של המושגים הללו. בנוסף, מוצגות תכונות חדשות של נקודות השייכות למעגל אוילר. בסוף כל פרק מובאות בעיות בנייה ובעיות חישוב המדגימות יישומים שונים למשפטים החדשים.
רקע מתמטי בסיסי מספיק להבנת רוב המשפטים. עם זאת, להבנת ההוכחות לרוב נדרש רקע גיאומטרי עמוק יותר.
לכן הספר מיועד לחובבי מתמטיקה, לסטודנטים במוסדות אקדמיים, למרצים ולמורי המתמטיקה. עם זאת, גם תלמידי החינוך העל-יסודי עשויים למצוא עניין בהיכרות עם המשפטים החדשים ובעיות הבנייה, ולהיווכח שגם היום ניתן למצוא חידושים מתמטיים אפילו בתחומים עתיקים כמו גיאומטריה אוקלידית.

״רבים התייחסו לגיאומטריה האוקלידית כאל תחום בו רוב החידושים מוצו, ומעטים החוקרים המנסים לחדש בתחום זה. כאן ייחודו של ספר זה, המסכם את חידושיו של ד״ר דוד פרייברט בגיאומטריה אוקלידית, חידושים שזכו לפרסום בספרות המדעית.
ד״ר פרייברט משכיל להטיל אור על קשרים חדשים בין מרובעים קמורים ומעגלים, המניבים תוצאות מפתיעות ומעניינות. הספר כתוב בשפה בהירה וערוך בצורה נאה המשובבת עין. אני רואה בו תרומה חשובה לחובבי המתמטיקה בכלל והגיאומטריה האוקלידית בפרט, ומברך את המחבר על שזכה להוציא יצירה כה מתוקנת מתחת ידיו.״
פרופ׳ דניאל הרשקוביץ, לשעבר שר המדע והטכנולוגיה.

״ספרו של ד״ר דוד פרייברט מתמקד בתאוריה של מרובע קמור ומעגל היוצר נקודות פסקל על צלעותיו. מנקודת המוצא הנושא מתרחב לכיוונים שונים כשבכול שלב מוגשת הגדרה, מוצגת טענה וההוכחה שלה בצרוף ההנמקות המתמטיות ובליווי איורים ברורים. חלק מההוכחות של התכונות החדשות הושגו ע״י שימוש מפתיע במספרים מרוכבים, שבדרך כלל אינם מהווים כלי בחקר גיאומטרי, ומצביעים על כך שהמתמטיקה מהווה עץ עבות, המורכב מענפים שונים המשתלבים זה בזה.
היישום של התכונות המפתיעות שנתגלו בא לידי ביטוי בביצוע בניות גיאומטריות שלכאורה נחשבו כבלתי-אפשריות. הספר קריא, ללא דילוג על שלבים וערוך בצורה אסטטית וברורה.
בהכנת הספר הושקע עמל רב והוא יכול לשמש כחומר להעשרה בחוגים לתלמידי תיכון מצטיינים במתמטיקה, לשילוב בקורסים אקדמיים הן של מתמטיקה והן של חינוך מתמטי וגם כבסיס למאמרים ולעבודות לתארים מתקדמים.״
ד״ר משה סטופל, פרופ׳ לחינוך מתמטי במכללות להוראה.

״ד״ר דוד פרייברט חקר קשרים בין מרובע קמור לבין מעגלים מיוחדים היוצרים נקודות פסקל על צלעותיו.
בספר מופיעים מושגים חדשים כגון נקודות פסקל, מעגל מתואם עם נקודות פסקל, חבורה מעל קבוצת זוגות של נקודות פסקל.
חקירה מעמיקה בסיוע GeoGebra מוקדשת לתכונות שטח והקף של מרובעים החסומים במרובע קמור נתון והמוגדרים על ידי נקודות פסקל של קבוצות מעגלים.
בספר מוכחים משפטים יפים ומפתיעים של חפיפה ודמיון בין מרובעים, מוצגות שמורות לגבי הקפי מרובעים אלה ומוצגת תכונת אקסטרמום לגבי מרובעים המוגדרים בעזרת נקודות פסקל.
ממרובע כלשהו המחקר עובר למרובע בר חסימה, ולאחר מכן למרובע בעל אלכסונים מאונכים.
מוגדרת קבוצה מיוחדת של מלבנים המוגדרים בעזרת מעגלי נקודות פסקל. נחקרות תכונות הקשורות למעגל תשע הנקודות של אוילר.
חלק מההוכחות מצריכות ידע מעמיק בשיטות הוכחה כגון שימוש בווקטורים, באינוורסיה, בסיבוב או בשילוב מספרים קומפלקסיים בגיאומטרית הישר והמעגל. לכן כל הרוצה להבין את הוכחות המשפטים, מומלץ שיתחיל עם קריאת הנספחים שבספר.
דוד פרייברט הקדיש שנים רבות לחקירת שטח חדש בגיאומטריה אוקלידית, בכישרון ובהתמדה פתח אופקים חדשים להמשך מחקר. כל חובב גיאומטריה, תלמיד, סטודנט, מורה וחוקר ימצא עניין רב בספרו של דוד פרייברט, המהווה מעין מפעל חיים מתמטי.
אני מודה לד״ר דוד פרייברט על שיתוף הפעולה ועל הכבוד לאפשר לי לקרוא בין הראשונים את ספרו המונומנטלי.״

ד״ר אבי סיגלר, המכללה האקדמית שאנן - חיפה.

פרק 2

הרחבת התיאוריה למקרה של מרובע בר חסימה

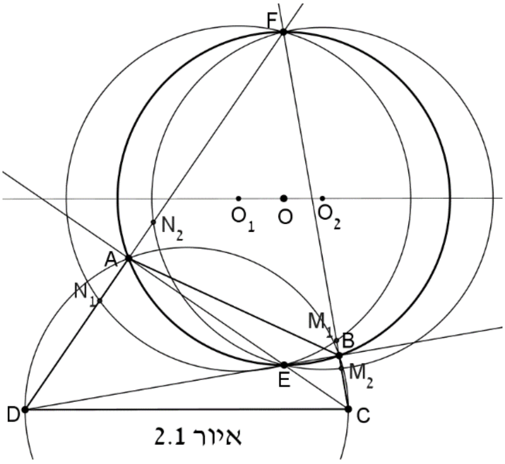
בפרק זה נדון בנושאים הבאים:

- תנאים הכרחיים ומספיקים למרובע בר חסימה הנקבעים בעזרת "מעגל המתואם עם נקודות פסקל הנוצרות בעזרתו".
- תכונות היקף, שטח וחפיפה של "מרובעים המוגדרים בעזרת מעגלים היוצרים נקודות פסקל[1]".
- תנאי הכרחי ומספיק למרובע בר חסימה הנקבע בעזרת מעגל תשע הנקודות.

בפרק זה נתייחס למרובע בר חסימה שעבורו קיים מעגל היוצר נקודות פסקל על זוג צלעות נגדיות.

הדרישה שהמרובע יהיה מרובע בר חסימה מבטיחה שהמרובע קמור. אך עדיין נדרש שעבור מרובע זה יהיה מעגל היוצר נקודות פסקל על זוג צלעות נגדיות.

למשל, עבור המרובע שבאיור 2.1, לא קיים מעגל שעובר דרך נקודות החיתוך E ו-F ויוצר נקודות פסקל על הצלעות AB ו-CD. שכן, כל מעגל העובר דרך נקודות החיתוך E ו-F, בהכרח עובר דרך הקודקודים A ו-B בו-זמנית (במצב זה לא קיימת נקודת פסקל P), או לחילופין חותך צלע **והמשך** של צלע נגדית (במצב זה נקודת פסקל P נמצאת על ההמשך של הצלע AB ולא על הצלע עצמה[2]).



איור 2.1

[1] ראו הגדרה אחרי משפט 1.1.

[2] ראו הערה ה' במבוא.

רוב המשפטים בפרק זה מתייחסים במידה זו או אחרת לנתון הכללי הבא:

נתון כללי של פרק 2:

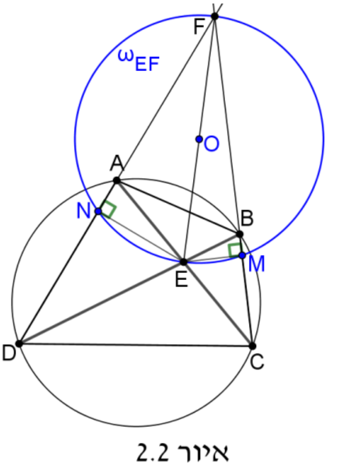
יהי $ABCD$ מרובע קמור, שבו E נקודת חיתוך האלכסונים ו-F נקודת חיתוך המשכי הצלעות BC ו-AD; קיימת הקבוצה $\{\omega_i\}$ של מעגלים היוצרים נקודות פסקל על הצלעות AB ו-CD.

סעיף א׳: תנאים הכרחיים ומספיקים למרובע בר חסימה הנקבעים בעזרת מעגל המתואם עם נקודות פסקל הנוצרות בעזרתו

משפט 2.1:

בנוסף לנתון הכללי של פרק 2, יהי ω_{EF} מעגל שקוטרו הקטע EF החותך את הצלעות BC ו-AD בנקודות פנימיות M[3] ו-N בהתאמה (ראו איור 2.2).

אז, המרובע $ABCD$ הוא בר חסימה אם ורק אם הנקודות M ו-N מחלקות את הצלעות BC ו-AD ביחס שווה, כלומר מתקיים: $\frac{AN}{ND} = \frac{BM}{MC}$.



איור 2.2

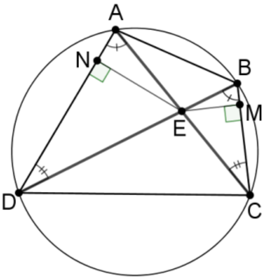
[3] בפרק זה, כאשר ברור אילו נקודות מוגדרות בעזרת המעגל ω_{EF}, נסמן אותן ללא אינדקסים. במקומות אחרים נסמן את הנקודות המוגדרות בעזרת המעגל ω_{EF} עם האינדקס 0.

הוכחה:[4]

מהנתון של המשפט, נובע כי במרובע $ABCD$ מתקיים: $\measuredangle EMB = 90°$ ו- $\measuredangle ENA = 90°$,

ומכאן: $EM \perp BC$ ו- $EN \perp AD$.

לכן ניתן לנסח את הכיוון הראשון באופן הבא:



איור 2.3

כיוון ראשון

נתון: $ABCD$ מרובע בר חסימה, שבו $BC \nparallel AD$; $E = AC \cap BD$;
$EM \perp BC$ ($M \in BC$); $EN \perp AD$ ($N \in AD$).

צ"ל: $\frac{BM}{MC} = \frac{AN}{ND}$.

הוכחה של הכיוון הראשון

במרובע בר חסימה $ABCD$ מתקיים: $\measuredangle DAC = \measuredangle DBC$ (ראו איור 2.3). מכאן נובע דמיון בין משולשים ישרי זווית EBM ו-EAN, ולכן מתקיימת הפרופורציה $\frac{BM}{AN} = \frac{EM}{EN}$ $(*)$.

באופן דומה מתקיים: $\Delta ECM \sim \Delta EDN$ (כי $\measuredangle ADB = \measuredangle ACB$), ומכאן $\frac{CM}{DN} = \frac{EM}{EN}$ $(**)$.

מהפרופורציות $(*)$ ו-$(**)$ נובע כי $\frac{BM}{AN} = \frac{CM}{DN}$ ומכאן: $\frac{BM}{MC} = \frac{AN}{ND}$.

כיוון שני[5]

נתון: מרובע $ABCD$ שבו $BC \nparallel AD$; $E = AC \cap BD$; $EM \perp BC$ ($M \in BC$);
$EN \perp AD$ ($N \in AD$); $\frac{BM}{MC} = \frac{AN}{ND}$.

צ"ל: המרובע $ABCD$ בר חסימה.

הוכחה של הכיוון השני

בפרופורציה הנתונה, נחלק את המונה והמכנה של האגף השמאלי ב-EM ואת המונה והמכנה של האגף הימני ב-EN, נקבל: $\frac{\frac{BM}{EM}}{\frac{MC}{EM}} = \frac{\frac{AN}{EN}}{\frac{ND}{EN}}$.

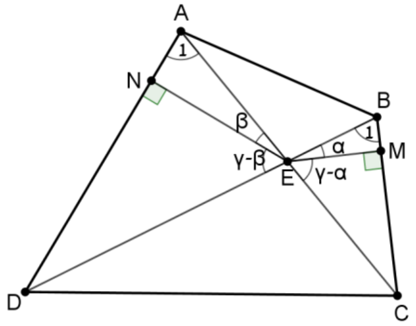
כל אחד מארבעת היחסים בפרופורציה האחרונה הוא יחס של ניצבים במשולש ישר זווית שקודקודו בנקודה E (ראו איור 2.4-א'). היחסים הללו מבטאים טנגנסים של ארבע זוויות שקודקודן בנקודה E.

לכן מתקיימת הפרופורציה הבאה: $\frac{\tan\measuredangle BEM}{\tan\measuredangle CEM} = \frac{\tan\measuredangle AEN}{\tan\measuredangle DEN}$.

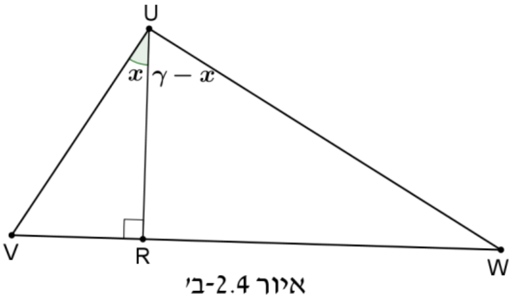
נסמן: $\measuredangle BEM = \alpha$, $\measuredangle AEN = \beta$, $\measuredangle AED = \measuredangle BEC = \gamma$,

---

[4] הוכחה אחרת למשפט זה, המשתמשת בשיטת המספרים המרוכבים, מופיעה בסעיף 4 של נספח ג'.
[5] הרעיון להוכחת הכיוון השני של המשפט בדרך זו הוצעה ע"י ד"ר אבי סיגלר.



איור 2.4-א'



איור 2.4-ב'

ולכן: $\measuredangle CEM = \gamma - \alpha$ ו- $\measuredangle DEN = \gamma - \beta$.

לכן מתקיים: $\frac{\tan\alpha}{\tan(\gamma-\alpha)} = \frac{\tan\beta}{\tan(\gamma-\beta)}$.

יש להוכיח שעבור כל ערך של γ מתקיים: $\alpha = \beta$.

בתמונת-מצב גיאומטרית המתוארת באיור 2.4-ב': UR הוא גובה לצלע VW במשולש UVW,

$\frac{VR}{RW} = k$, $\measuredangle VUR = x$, $\measuredangle VUW = \gamma$ ולכן $\measuredangle RUW = \gamma - x$.

מכאן נקבל: $\frac{\tan x}{\tan(\gamma-x)} = \frac{\frac{VR}{UR}}{\frac{RW}{UR}} = \frac{VR}{RW} = k$, כלומר $\frac{\tan x}{\tan(\gamma-x)} = k$ $(*)$.

יש להבחין בין שלושה מקרים עבור הזווית γ: (i) γ זווית ישרה, (ii) γ זווית חדה, (iii) γ זווית קהה.

במקרה (i) הנוסחה $(*)$ היא $\frac{\tan x}{\tan(90°-x)} = k$, ומכאן:

$\frac{\sin x \cdot \cos(90°-x)}{\cos x \cdot \sin(90°-x)} = k \Leftarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = k$ ולבסוף $\tan^2 x = k$.

x היא זווית חדה, לכן $\tan x > 0$, לפיכך למשוואה האחרונה יש פתרון יחיד $\tan x = \sqrt{k}$.

במקרים (ii) ו-(iii) נשתמש בנוסחה $(*)$ ונבטא את $\tan x$ באמצעות k ו-γ:

$\frac{\tan x(1+\tan\gamma\cdot\tan x)}{\tan\gamma - \tan x} = k$, ומכאן לאחר פישוט:

$$\tan\gamma \cdot \tan^2 x + (k+1)\tan x - k\tan\gamma = 0 \quad (**).$$

נתייחס לשוויון $(**)$ כמשוואה ריבועית עבור $\tan x$. הפתרונות של משוואה זו הם:

$$\tan x = \frac{-k-1 \pm \sqrt{(k+1)^2 + 4k\tan^2\gamma}}{2\tan\gamma} \quad (***).$$

בנוסחה $(***)$ הביטוי $\Delta = (k+1)^2 + 4k\tan^2\gamma$ תמיד חיובי (עבור כל k ו- $\gamma \neq 90°$),

ובנוסף לכך דורשים ש- $\tan x > 0$. לכן במקרים (ii) ו-(iii) למשוואה $(**)$ יש פתרון יחיד.

במקרה (ii) מתקיים כי $\tan\gamma > 0$, ולכן הפתרון היחיד הוא

$$\tan x = \frac{-k-1+\sqrt{(k+1)^2+4k\tan^2\gamma}}{2\tan\gamma}.$$

במקרה (iii) מתקיים כי $\tan\gamma < 0$, ולכן הפתרון היחיד הוא

$$\tan x = \frac{-k-1-\sqrt{(k+1)^2+4k\tan^2\gamma}}{2\tan\gamma}.$$

קיבלנו שבכל שלושת המקרים לעיל עבור $\tan x$ יש פתרון יחיד שמבוטא באמצעות k ו-γ הנתונים.

נחזור למשולשים AED ו-BEC, נסמן: $\measuredangle AED = \measuredangle BEC = \gamma$ ו- $k = \frac{BM}{MC} = \frac{AN}{ND}$.

עבור המשולשים הללו, המשוואה $(*)$ תהיה $k = \frac{\tan\alpha}{\tan(\gamma-\alpha)}$ ו- $k = \frac{\tan\beta}{\tan(\gamma-\beta)}$ בהתאמה.

הפתרונות של המשוואות הללו זהים עבור כל ערך של γ, ולכן $\tan\alpha = \tan\beta$.

לכן הזוויות החדות α ו-β מקיימות $\alpha = \beta$.

מכאן שבמשולשים ישרי זווית EBM ו-EAN מתקיים שוויון גם בין הזוג השני של הזוויות החדות, כלומר $\measuredangle B_1 = \measuredangle A_1$ (ראו איור 2.4-א').

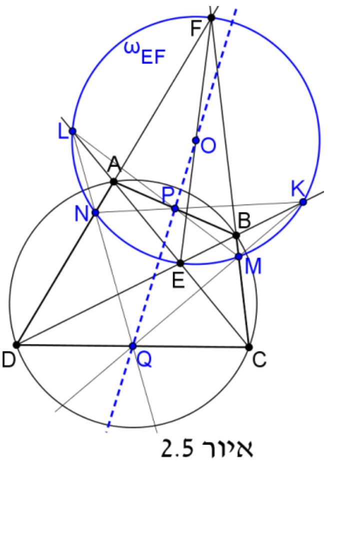
השוויון האחרון שקול לשוויון $\measuredangle DBC = \measuredangle DAC$, וזה מבטיח ש-$ABCD$ הוא מרובע בר חסימה.

מש"ל

<u>משפט 2.2:</u>

בנוסף לנתון הכללי של פרק 2, יהי ω_{EF} מעגל שקוטרו הקטע EF היוצר את נקודות פסקל P ו-Q על הצלעות AB ו-CD בהתאמה.

אז, $ABCD$ הוא מרובע בר חסימה אם ורק אם המעגל ω_{EF} מתואם עם נקודות פסקל הנוצרות בעזרתו (כלומר, הנקודות P ו-Q קולינאריות עם המרכז O של המעגל ω_{EF}, ראו איור 2.5).



איור 2.5